CONDUÇÃO DE CALOR APLICADO AO ESTUDO DE CONCEITOS MATEMÁTICOS DO ENSINO MÉDIO

Douglas Gonçalves Moçato***

Luiz Roberto Walesko***

Sumário

1 - Introdução

Este trabalho visa mostrar um pouco sobre a transmissão de calor, mostrando de que nada mais é do que troca de energia entre dois copos, ou ainda em um único corpo com diferença de temperatura entre dois extremos deste corpo.

Este trabalho pode ser utilizado no ensino médio, em física no 2° ano no capítulo em que tratamos sobre calor, podendo mostrar a transmissão de calor. Ainda podemos utilizar em vários itens de matemática, por exemplo, mostrando a aplicação em funções, sistemas de equações, matrizes, etc..., Abordando a interdisciplinaridade mostrando aplicação matemática no problema.

***** UNIVERSIDADE TUIUTI DO PARANÁ - Artigo para conclusão do curso de pós-graduação em Ensino de Matemática.**

2 – Noções da Transferência de Calor:

Nos estudos de transferência de calor, é usual considerar três modos distintos:

2.1 Convecção: esse processo de transmissão de calor ocorre apenas em fluidos, ou seja, o calor é transferido de uma região para outra tendo como agente o próprio fluido.

2.2 Radiação: todos os corpos emitem continuamente energia em virtude de sua temperatura. A energia da radiação emitida por um corpo é transmitida no espaço em forma de ondas eletromagnéticas, a energia assim emitida é a radiação térmica. A emissão da energia radiante por um corpo é um processo de massa, isto é, a radiação, que se origina no interior do corpo, é emitida através da superfície.

2.3 Condução: é o modo em que à transferência de calor se da pela transferência de energia da parte de alta temperatura para de baixa temperatura pelo impacto direto das moléculas, ou pelo movimento dos elétrons livres. A transferência de energia, decorrente da diferença de temperatura, entre partes adjacentes de uma substancia, é chamada de condução de calor. Quando duas porções de uma substância são mantidas a temperaturas diferentes, verifica-se experimentalmente que há uma distribuição contínua de temperatura, entre elas, o calor flui da região de alta temperatura para a de baixa temperatura.

A energia transferida pelo fluxo de calor não pode ser medida diretamente, mas o conceito tem significado físico porque é relacionada à grandeza mensurável chamada temperatura. Quando uma substância é mantida a temperaturas diferentes, ou seja, uma extremidade dela à temperatura t_1 e outro extremidade dela à temperatura t_2 verifica-se que há uma distribuição contínua de temperatura entre ela.

3 - Condução de calor Unidimensional

3.1 Lei da condução de calor – Lei de Fourier

A lei da condução de calor baseada em experimentos recebe o nome de lei de Fourier. Esta estabelece que a taxa de fluxo de calor por condução, em uma dada direção, é proporcional a área normal à direção do fluxo e ao gradiente de temperatura naquela direção.

Representamos uma quantidade de calor pela letra Q. Considere uma camada da substância de área de secção reta A e espessura Δx, cujas faces sejam mantidas a temperaturas diferentes. Sendo k a condutividade térmica do material, que é uma grandeza constante positiva. Mede-se a quantidade de calor que flui perpendicularmente às faces durante um tempo t. Sendo Q proporcional ao tempo t e área A para uma dada diferença de temperatura Δt, e que Q é proporcional a $\Delta t / \Delta x$ para todo t e A, desde que Δt e Δx, sejam pequenas. Assim a lei de Fourier é dada por:

.

$$\boxed{Qx = -kA\frac{\Delta T}{\Delta x}} \quad \text{W} \qquad (1)$$

Ou

$$\boxed{qx = \frac{Qx}{A} = -k\frac{\Delta T}{\Delta x}} \quad \text{W/m}^2 \quad (2)$$

Onde q(x) é o fluxo de calor no sentido positivo de x. Se a temperatura decresce no sentido positivo do x, $\frac{\Delta T}{\Delta x}$ é negativo; então q(x) (ou Q(x)) fica positiva por causa do sinal negativo que antecede a constante de condutividade térmica (k).

Vejamos um exemplo para melhor fixação do tema:

- *"Fogão a lenha tem, na chapa, um conjunto de círculos de ferro acoplados, que calibram o volume do fogo para todo tipo de comida".*

Fig 1 – Ilustração da transferência por condução e radiação.

EXEMPLO 1 : Determinar o fluxo de calor q e a taxa de transferência de calor através de uma placa de ferro com área A = 0,5 m^2 e espessura L = 0,02 m (K = 70 w/(m.°C)) quando um de suas superfícies é mantida a T_1 = 60°C e a outra, a T_2 = 20°C

$$q = -k\frac{\Delta T(x)}{\Delta(x)} = k\frac{T_2 - T_1}{L} = -70.\frac{20-60}{0{,}02} = 140000W/m^2 = 140kW/m^2$$

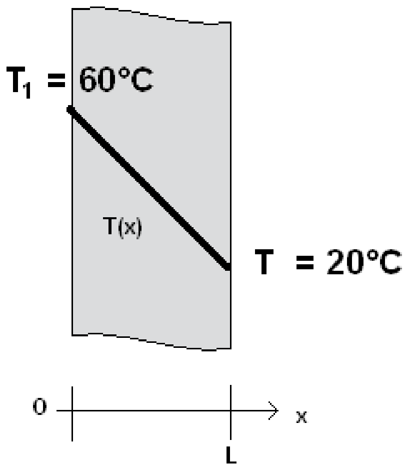


Fig 2 – Taxa de variação do fluxo em relação a distância.

Logo, o fluxo de calor se processa no sentido positivo do x, pois o resultado é positivo. A taxa de fluxo de calor Q através de uma área A = $0{,}5m^2$ é computado da seguinte forma:

$$q = \frac{Q}{A} = A.q = 0{,}5 \,.\, 140.000 = 70 \text{ kW}$$

3.2 - Condução de calor Bidimensional

3.2.1 - Solução Numérica:

Um método aproximado, embora muito simples, para determinar a condução de calor em sistemas bidimensionais. Sejam T_1 e T_2 dois potenciais característicos de temperatura num fluxo de calor bidimensional e seja Q a taxa de fluxo total de calor através desses dois potenciais. O fator da condução S define-se de modo a relacionar a taxa de fluxo total de calor Q à diferença de temperatura:

$$Q = S\,k\,(T_1 - T_2) \qquad (3)$$

O fator de forma de condução S é computado, geometricamente em uma placa, da seguinte forma:

$$S = \frac{A}{L} \qquad (4)$$

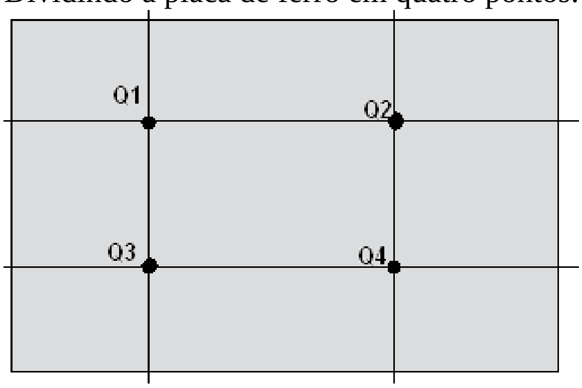
Aplicando (4) na equação (3)

$$Q = S\,k\,(T_1 - T_2)$$

$$Q = 25.70.\ 40 = 70000 = 70 \text{ k w}$$

<u>OUTRO ANÁLISE:</u>

Dividindo a placa de ferro em quatro pontos:



Temos que :

$Qm - S.k.Tm + s\ k\ Ti = 0$

$Q_1 - S.\ k.\ T_1 + s\ k\ Ti = 0$
$Q_2 - S.\ k.\ T_2 + s\ k\ Ti = 0$
$Q_3 - S.\ k.\ T_3 + s\ k\ Ti = 0$
$Q_4 - S.\ k.\ T_4 + s\ k\ Ti = 0$

S = 0,5 / 0,02 = 25 m
k = 70 W/°Cm
T_1 = 50° C
T_2 = 70° C
T_3 = 59° C
T_4 = 61° C

Q_1 – 87500 + 35000 = 52500W
Q_2 – 122500 + 35000 = 87500W
Q_3 – 103250 + 35000 = 68250W
Q_4 – 106750 + 35000 = 71750W

Assim:

Qtotal = (Q1 + Q2 + Q3 + Q4)/4
Qt = (52500 + 87500 + 68250 + 71750)/4
Qt = 70.000 W

Onde Tm é a temperatura medida no ponto m e T_1 é temperatura inicial da superfície.

3.2 Coordenadas Cartesianas, Cilíndricas e Esféricas:

A área *A* não varia com x, e por isso é considerada constante e cancelada. Então a equação fica da seguinte maneira:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(rk\frac{\partial T}{\partial x}\right) + g = \rho C_p \frac{\partial T(r,t)}{\partial t}}$$

que é a equação de condução de calor, unidimensional, dependendo do tempo, no sistema de coordenadas cartesianos.

Coordenadas cilíndricas

Com as coordenadas esféricas, representamos a variável radial por *r*, em vez de x. Assim substituímos *x* por *r* na equação e notamos que a área *A* é proporcional a r^2. Assim a equação fica da seguinte forma:

$$\boxed{\frac{1\partial}{r\partial r}\left(rk\frac{\partial T}{\partial r}\right)+g=\rho C_p\,\frac{\partial T(r,t)}{\partial t}}$$

esta equação de condução de calor unidimensional, depende do tempo, no sistema de coordenadas cilíndricas.

Coordenadas esféricas

No sistema de coordenadas esféricas, é também costume representar a variável radial por *r* em vez de *x*. Assim substituindo *x* por *r* na equação notamos que a área *A* é proporcional a r^2. Assim a equação fica da seguinte forma:

$$\boxed{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2k\frac{\partial T}{\partial r}\right)+g=\rho C_p\,\frac{\partial T(r,t)}{\partial t}}$$

Esta é a equação de condução de calor unidimensional, depende do tempo, no sistema de coordenadas esféricas.

3.3 Condução de calor Unidimensional, Bi e Tri dimensional:

Considere uma placa (por exemplo, uma parede) de espessura L. A placa é suficientemente grande nas direções y e z em comparação com sua espessura L, de modo a assegurar que o gradiente de temperatura nas direções y e z sejam desprezíveis diante do gradiente na direção x. A temperatura no interior do sólido não varia com o tempo. Então a distribuição da temperatura T(x) de condutividade térmica k e com uma geração de energia à taxa de g(x) W/m^3, a equação de condução de calor é dada por:

$$\boxed{\frac{d^2T(x)}{dx^2}+\frac{1}{k}g(x)=0}$$

que é válida no domínio da placa limitada à reação 0 < x < L. Uma vez determinada a distribuição e temperatura T(x) na placa pela resolução desta equação, o fluxo de calor q(x) em qualquer ponto da placa é calculado a partir da definição

$$\boxed{q(x) = -k\frac{dT(x)}{d(x)}} \quad \text{W/m}^2$$

Estamos mostrando a resolução da equação da condução de calor com ou sem geração de energia, numa placa de espessura L e na determinação da distribuição de temperatura T(x) dentro da placa.

Para Ilustrarmos o procedimento geral, no caso de geração constante de energia g_0 e passamos a usar a fórmula da seguinte maneira:

$$\boxed{\frac{d^2T(x)}{dx^2} = -\frac{g_0}{k}}$$

A primeira e a segunda integração desta equação respectivamente são:

$$\boxed{\frac{dT(x)}{dx} = -\frac{g_0}{k}k + C_1}$$

$$\boxed{T(x) = -\frac{g_0}{2k}x^2 + C_1x + C_2}$$

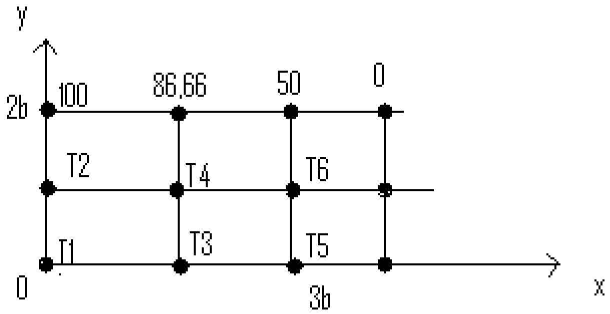
Onde C_1 e C_2 são as constantes de integração.

São necessárias duas condições de contornos para determinar estas constantes. Numa placa na região $0 \le x \le L$, uma condição de contorno é dada na superfície em x = 0 e outra, na superfície em x = L. Essa condição de contorno pode ser uma temperatura dada, um fluxo de calor dado, ou uma condição convectiva na fronteira.

Até aqui a nossa análise foi geral, mas precisamos saber a dependência entre a área A e o eixo coordenado x a fim de completar a dedução da equação da condução de calor. Por isso, consideramos essa propagação nos sistemas de coordenadas cartesianas, cilíndricas, e esféricas.

Vejamos um exemplo de condução bidimensional

Considere a condução de calor estacionária em uma região retangular $0 \le x \le 3b$ $0 \le y \le 2b$, sujeitas as condições de contorno da figura. Calcule as temperaturas T_m, para m = 1 até m = 6, nos seis nodos mostrados na figura, e compare a solução das diferenças finitas com os resultados exatos.



Solução: As equações de diferenças finitas em cada nodo são

Nodo 1: $$2T_2 + 2T_3 - 4T_1 = 0$$

Nodo 2: $$T_1 + 2T_4 + 100 - 4T_2 = 0$$

Nodo 3: $$T_1 + 2T_4 + T_5 - 4T_3 = 0$$

Nodo 4: $$T_2 + T_3 + T_6 + 86{,}66 - 4T_4 = 0$$

Nodo 5: $$T_3 + 2T_6 - 4T_5 = 0$$

Nodo 6: $$T_4 + T_5 + 50 - 4T_6 = 0$$

$$\begin{vmatrix} -4 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -100 \\ 0 \\ -86{,}66 \\ 0 \\ -50 \end{vmatrix}$$

A solução desta equação matricial fornece as seis temperatura nodais T_m, m = 1 até 6.

T_m	Solução Matricial	Valores Exatos
T1	63,6	62,4
T2	72,2	71,1
T3	55,1	54,0
T4	62,5	61,2
T5	31,8	31,2
T6	36,1	35,6

***** UNIVERSIDADE TUIUTI DO PARANÁ - Artigo para conclusão do curso de pós-graduação em Ensino de Matemática.**

Os valores exatos deste problema de condução de calor são retirados da solução analítica, informado pelo problema, que é:

$$T(x,y) = 100\frac{\cosh[\pi y/(6b)]}{\cosh[y/(3b)]}\cosh\left(\frac{\pi}{6b}x\right)$$

Obs.: A exatidão da solução matricial pode ser melhorada se utilizarmos uma malha mais fina.

Equação Tridimensional

Deduzimos a equação de condução de calor, unidimensional, dependente do tempo. Seguindo um método semelhante, mas admitindo a condução de calor nas três dimensões, pode-se também estabelecer uma equação geral. Nos livros que tratam de condução de calor temos as deduções explicadas em vários textos, porem aqui apresentaremos diretamente as equações resultantes nos sistemas de coordenadas cartesianas, no caso de *condutividade térmica constante*.

Assim temos no sistema de coordenadas cartesianas (x, y, z), a equação de condução de calor da seguinte forma:

$$\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{k}g = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}}$$

onde: $T \equiv T(x, y, z)$

Conclusão

A nossa análise foi geral, mas precisamos saber a dependência entre a área A e o eixo coordenado x a fim de completar a dedução da equação da condução de calor. Por isso, consideramos essa propagação nos sistemas de coordenadas cartesianas, cilíndricas, e esféricas

Referencias Bibliográficas:

Ozisik. M. N**. Transferência de calor.** Rio de janeiro: editora Guanabara koogans S.A,1990.

Cunha. M. C. C. **Métodos numéricos.** Campinas, São Paulo: Editora da Unicamp, 2000.

CERVO, A. L.; BERVIAN, P. A**. Metodologia científica**. São Paulo: McGraw. Hill do Brasil, 1976.

***** UNIVERSIDADE TUIUTI DO PARANÁ - Artigo para conclusão do curso de pós-graduação em Ensino de Matemática.**